



Prof. Dr. Rupert Frank
Charlotte Dietze
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 2 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
3. November 2021

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 Punkte). (i) Sei $C \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und es gelte $\sup C < \infty$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon \in C$ gibt so, dass $\sup C - c_\varepsilon < \varepsilon$.

(ii) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen und es gelte $\sup A < \infty$ und $\sup B < \infty$. Definiere

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(iii) Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Zudem gebe es Konstanten $C_f, C_g > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \leq C_f$ und $g(x) \leq C_g$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Hinweis: Um die Gleichheit zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ zu beweisen, kann man zeigen, dass $x \leq y$ und $y \leq x$.

Definition (Maximum und Minimum). Für $M \subset \mathbb{R}$ heißt $m \in \mathbb{R}$ *Maximum von M* , wenn $m \in M$ und $m = \sup M$. Analog dazu heißt $m \in \mathbb{R}$ *Minimum von M* , wenn $m \in M$ und $m = \inf M$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei

$$M := \left\{ \frac{x+1}{x+2} : x \geq 0 \right\}.$$

Entscheiden Sie jeweils, ob Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von M existieren und falls ja, bestimmen Sie die entsprechenden Werte.

Lösung. Sei $x \geq 0$. Wir bemerken zunächst, dass

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}. \quad (1)$$

Weiter ist $x+2 \geq 2$, also durch Kehrwertbildung

$$\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2}$$

und somit

$$1 - \frac{1}{x+2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Da aber $\frac{1}{2} \in M$ (setze $x = 0$), ist $\min M = \frac{1}{2}$ und somit auch $\inf M = \frac{1}{2}$ (falls das Minimum existiert, ist es immer gleich dem Infimum).

Da sich der Term (1) für große $x \geq 0$ der 1 annähert (hier kann man sich auch den Graphen skizzieren!), vermuten wir, dass $\sup M = 1$. Um das zu beweisen, gehen wir die Definition des Supremums von M durch:

- 1 ist obere Schranke von M : Für alle $x \geq 0$ gilt

$$1 - \frac{1}{x+2} < 1.$$

- 1 ist die kleinste obere Schranke von M : Sei $s < 1$. Wir zeigen, dass s keine obere Schranke von M sein kann. Dazu müssen wir ein $x \geq 0$ finden mit

$$1 - \frac{1}{x+2} > s. \tag{2}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x+2} &> s \\ \Leftrightarrow 1 - s &> \frac{1}{x+2} \\ \Leftrightarrow x+2 &> \frac{1}{1-s} \\ \Leftrightarrow x &> \frac{1}{1-s} - 2 = \frac{2s-1}{1-s}. \end{aligned}$$

Wählen wir also $x \geq 0$ mit $x > \frac{2s-1}{1-s}$ (beispielsweise das doppelte), ist (2) für dieses x erfüllt. Damit haben wir aber ein Element von M gefunden, das größer als s ist, womit s keine obere Schranke von M sein kann und 1 damit die kleinste obere Schranke von M ist.

Jedoch besitzt die Menge M kein Maximum, da die Gleichung

$$\frac{x+1}{x+2} = 1$$

keine Lösung $x \geq 0$ besitzt. □

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien reelle Zahlen $a_n < b_n$ gegeben. Wir definieren

$$I_n := [a_n, b_n].$$

Angenommen, $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset. \quad (3)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen.

(ii) Gilt (3) auch für $I_n := (a_n, b_n)$? Beweisen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 4. Ziel dieser Aufgabe ist es, Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten zu konstruieren. Dazu nutzen wir zunächst Potenzen mit ganzzahligen Exponenten und die n -ten Wurzeln einer positiven reellen Zahl. Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$.

(i) Zeigen Sie: Für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0, q > 0$ und $r = m/n = p/q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

Wir können also $b^r := (b^m)^{1/n}$ für alle rationalen Zahlen definieren.

(ii) Zeigen Sie: Mit dieser Definition gilt für $r, s \in \mathbb{Q}$, dass $b^{r+s} = b^r b^s$.

(iii) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$B(x) := \{b^t \mid t \in \mathbb{Q}, t \leq x\}.$$

Zeigen Sie: Für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$b^r = \sup B(r).$$

Dies motiviert die Definition $b^x := \sup B(x)$ für alle reellen Zahlen x .

(iv) Zeigen Sie: Mit dieser Definition gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, dass $b^{x+y} = b^x b^y$.

Lösung. (i) Seien alle Variablen wie in der Angabe. Setze $k := mq = pn$. Nach Vorlesung gibt es *genau ein* $a > 0$ mit der Eigenschaft $a^k = b^{mp}$ (nämlich die k -te Wurzel von b^{mp}). Mit den Rechenregeln für natürliche Exponenten (leichter Beweis mit Induktion!) und die n -te Wurzel folgt

$$\left((b^m)^{1/n}\right)^k = \left((b^m)^{1/n}\right)^{pn} = \left(\left((b^m)^{1/n}\right)^n\right)^p = (b^m)^p = b^{mp}.$$

und analog

$$\left((b^p)^{1/q}\right)^k = \left((b^p)^{1/q}\right)^{mq} = b^{mp}.$$

Aus der oben erwähnten Eindeutigkeit der k -ten Wurzel folgt $(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}$, was zu zeigen war.

(ii) Seien $r, s \in \mathbb{Q}$ und $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0, q > 0$ und $r = \frac{m}{n}$ und $s = \frac{p}{q}$. Wir beweisen nun $b^{r+s} = b^r b^s$ mit der gleichen Strategie wie in (i), indem wir verifizieren, dass beide Zahlen die gleiche nq -te Potenz haben (oder anders gesagt, dass beide Zahlen die nq -te Wurzel aus ein und der selben Zahl sind). In der Tat ist

$$\left(b^{r+s}\right)^{nq} = \left(b^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}\right)^{nq} = \left(b^{\frac{mq+pn}{nq}}\right)^{nq} = \left(\left(b^{mq+pn}\right)^{\frac{1}{nq}}\right)^{nq} = b^{mq+pn},$$

wobei die vorletzte Gleichheit die Definition für rationale Potenzen aus Aufgabenteil (i) ist. Weiter rechnen wir

$$\left(b^r b^s\right)^{nq} = \left((b^m)^{\frac{1}{n}} (b^p)^{\frac{1}{q}}\right)^{nq} = \left((b^m)^{\frac{1}{n}}\right)^{nq} \left((b^p)^{\frac{1}{q}}\right)^{nq} = b^{mq} b^{pn} = b^{mq+pn}.$$

Es folgt $b^{r+s} = b^r b^s$ aus der Eindeutigkeit der nq -ten Wurzel.

(iii) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Wir beweisen zunächst folgende Behauptung: Für alle $t \in \mathbb{Q}$ mit $t \leq r$ ist $b^t \leq b^r$. Seien zum Beweis erneut $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0, q > 0$ und $r = \frac{m}{n}, t = \frac{p}{q}$ mit $\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n}$. Letztere Bedingung ist äquivalent zu $pn \leq mq$. Wegen $b > 1$ folgt daraus $b^{mq-pn} \geq 1$ und damit

$$\left((b^p)^{\frac{1}{q}}\right)^{nq} = b^{pn} \leq b^{pn} b^{mq-pn} = b^{mq} = \left((b^m)^{\frac{1}{n}}\right)^{nq}.$$

Daraus folgt aber $(b^p)^{\frac{1}{q}} \leq (b^m)^{\frac{1}{n}}$ (denn für alle $a > b > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^n > b^n > 0$), was die Behauptung zeigt.

Aus der Behauptung erhalten wir sofort, dass b^r eine obere Schranke von $B(r)$ ist, also $\sup B(r) \leq b^r$. Wegen $b^r \in B(r)$ ist $b^r = \max B(r) = \sup B(r)$.

(iv) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $b^x b^y \leq b^{x+y}$ und $b^x b^y \geq b^{x+y}$. Seien $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $s \leq x, t \leq y$, so dass $b^s \in B(x), b^t \in B(y)$. Wegen $s, t \in \mathbb{Q}$ ist nach Teil (ii)

$$b^s b^t = b^{s+t} \leq \sup B(x+y) = b^{x+y}.$$

Aus obiger Ungleichung folgt $b^t \leq b^{x+y} b^{-s}$, also ist $b^{x+y} b^{-s}$ eine obere Schranke von $B(y)$ und es folgt

$$b^y = \sup B(y) \leq b^{x+y} b^{-s}$$

nach Definition des Supremums. Daraus folgt

$$b^x = \sup B(x) \leq b^{x+y} (b^y)^{-1},$$

und daraus die erste Ungleichung

$$b^x b^y \leq b^{x+y}. \quad (4)$$

Man beachte, dass *a priori* noch nicht bekannt ist, dass $(b^y)^{-1} = b^{-y}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $r \in \mathbb{Q}$ folgt das unmittelbar aus $1 = b^{r-r} = b^r b^{-r}$ (Rechenregel aus Aufgabenteil (ii)). Für allgemeines $y \in \mathbb{R}$ kann man aus (4) aber schon

$$b^y b^{-y} \leq b^{y-y} = b^0 = 1, \quad \text{also} \quad b^{-y} \leq (b^y)^{-1}$$

folgern. Wir nehmen die umgekehrte Richtung für den Moment an und führen den Beweis am Ende. Substituiere $x+y$ für x und $-y$ für y in Ungleichung (4), was $b^{x+y} b^{-y} \leq b^x$ liefert und damit

$$b^{x+y} = b^{x+y} b^{-y} (b^{-y})^{-1} \leq b^x (b^{-y})^{-1} = b^x b^y.$$

Dies ist die zweite benötigte Ungleichung und die Aussage ist bewiesen.

Es verbleibt, die Identität $b^{-y} \geq (b^y)^{-1}$ oder $b^y b^{-y} \geq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Dabei dürfen wir die in Aufgabenteil (iv) bewiesene Rechenregel natürlich nicht verwenden, denn wir haben diese ja gerade mit der zu zeigenden Identität bewiesen. Zu zeigen ist

$$\sup B(y) \sup B(-y) \geq 1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r \leq y$ und $s \leq -y$ sowie $y-r < \frac{1}{2n}$ und $-y-s < \frac{1}{2n}$ (Existenz garantiert durch archimedisches Axiom). Dann ist

$$\sup B(y) \sup B(-y) \geq b^r b^s \stackrel{(ii)}{=} b^{r+s} = (b^{y-r-y-s})^{-1} \geq b^{-\frac{1}{n}}.$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war und $\sup\{b^{-\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = 1$ ist, folgt die Behauptung.

Alternativlösung: Wir geben noch eine kürzere Alternativlösung, die verwendet, dass für $A, B \subset [0, \infty)$ mit $\sup A, \sup B < \infty$ gilt

$$\sup(AB) = \sup(A) \sup(B),$$

wobei $AB := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$ (Übungsaufgabe!). Da $B(x), B(y) \subset [0, \infty)$, können wir diesen Fakt auf diese Mengen anwenden. Es folgt dann

$$\begin{aligned} b^x b^y &= \sup B(x) \sup B(y) = \sup\{a \cdot b : a \in B(x), b \in B(y)\} \\ &= \sup\{b^s \cdot b^t : s \in \mathbb{Q}, s \leq x, t \in \mathbb{Q}, t \leq y\} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sup\{b^{s+t} : s \in \mathbb{Q}, s \leq x, t \in \mathbb{Q}, t \leq y\} \\ &= \sup\{b^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x + y\} \\ &= b^{x+y}, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

1(i) $C \subset \mathbb{R}$, $\sup C < \infty$, $C \neq \emptyset$

Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon \in C$ gibt so, dass

$$\sup C - c_\varepsilon < \varepsilon.$$

Beweis (durch Widerspruch):

Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $c \in C$ gilt:

$$\sup C - c \geq \varepsilon$$

Also gilt für alle $c \in C$

$$c \leq \sup C - \varepsilon.$$

Folglich ist $\sup C - \varepsilon$ eine obere Schranke von C . Nach Definition von $\sup C$ gilt

$$\sup C \leq \sup C - \varepsilon.$$

Da $\sup C < \infty$, folgt $0 \leq -\varepsilon$

$\begin{matrix} \nearrow \\ -\infty \\ \nwarrow \end{matrix}$
 $C \neq \emptyset$

$\downarrow$

□

1(ii) $A, B \subset \mathbb{R}$, $\sup A < \infty$, $\sup B < \infty$, $A, B \neq \emptyset$

$$A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

Beweisen oder widerlegen Sie: $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Beh: Die Aussage ist wahr

Beweis:

⊆ Sei $c \in A+B$. Dann gibt es $a \in A$, $b \in B$ s.d. $c = a+b$. Nach Definition von $\sup A$ und $\sup B$ gilt $a \leq \sup A$ und $b \leq \sup B$.
Daraus folgt, dass

$$c = a+b \leq \sup A + \sup B.$$

Da $c \in A+B$ beliebig war, haben wir bisher gezeigt, dass $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke von $A+B$ ist.

Nach Definition ist $\sup(A+B)$ die kleinste obere Schranke von $A+B$. Also gilt

$$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B.$$

⊇ Sei $\varepsilon > 0$. Nach (i) gibt es $a_\varepsilon \in A$ und $b_\varepsilon \in B$ s.d.

$$\sup A - a_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{und } \sup B - b_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt

$$\sup A + \sup B < a_\varepsilon + b_\varepsilon + \varepsilon \quad \begin{array}{c} a_\varepsilon + b_\varepsilon \in A+B \\ \downarrow \\ \leq \sup(A+B) + \varepsilon \end{array}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$$

□

1(iii) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq C_f$ und $g(x) \leq C_g$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\sup \{ f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} + \sup \{ g(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Beh.: Die Aussage ist falsch

Gegenbeispiel

Definiere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := 1_{\{x < 0\}} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x < 0 \\ 0, & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := 1_{\{x \geq 0\}} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Mit $C_f := 1$ und $C_g := 1$ gilt $f(x) \leq C_f$ und $g(x) \leq C_g$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Außerdem gilt:

$$\sup \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ 0, 1 \} = 1,$$

da 1 eine obere Schranke der Menge $\{0, 1\}$ ist und für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 1$ es ein $x \in \{0, 1\}$ gibt s.d. $a < x$ (nämlich $x = 1$).

Genauso gilt auch

$$\sup \{ g(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ 0, 1 \} = 1.$$

Jedoch ist

$$\sup \{ f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ 1 \} = 1$$

und folglich gilt

$$\sup \{ f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = 1 < 2 = 1 + 1 = \sup \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} + \sup \{ g(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

□

3(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien reelle Zahlen $a_n < b_n$ gegeben. Definiere $I_n := [a_n, b_n]$. Angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subset I_n$. Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

Beweis:

Schritt 1: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq b_m$.

Beweis von Schritt 1:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Fall: $n \leq m$

In diesem Fall gilt $I_m \subset I_n$, also $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$. Insbesondere gilt $a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$ und damit $a_n \leq b_m$.

2. Fall: $n > m$

In diesem Fall gilt $I_n \subset I_m$, also $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$. Es folgt $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$, also auch $a_n \leq b_m$.

Schritt 2:

Definiere $a := \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nach Schritt 1 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ dass $a_n \leq b_1$ und folglich ist $b_1 \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es folgt: $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$.
Zudem ist die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht leer, da $a_1 \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Also gilt auch $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} > -\infty$ und daher ist $a \in \mathbb{R}$.

Schritt 3: $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

Beweis von Schritt 3:

Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a \in I_n$. Sei dazu $\tilde{n} \in \mathbb{N}$.

Nach Definition von a gilt $a_n \leq a$. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $a \leq b_{\tilde{n}}$.

Angenommen, das wäre falsch, d.h. $b_{\tilde{n}} < a$. Nach Schritt 1 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_n \leq b_{\tilde{n}}$. Also ist $b_{\tilde{n}}$ eine obere Schranke der Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Es folgt

$$a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } a}}{=} \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Das Supremum} \\ \text{ist die kleinste} \\ \text{obere Schranke}}}{\leq} b_{\tilde{n}} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Annahme}}}{<} a \quad \text{↯}$$

Also muss $b_{\tilde{n}} \geq a$ gelten. Demnach gilt $I_{\tilde{n}} = [a_{\tilde{n}}, b_{\tilde{n}}] \ni a$ und da $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

□

(ii) Gilt $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ auch für $I_n = (a_n, b_n)$?

Beh.: nein

Beweis (durch Gegenbeispiel):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$a_n := 0$$

$$b_n := \frac{1}{n}$$

Angenommen, es gäbe ein $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$. Dann gilt für

alle $n \in \mathbb{N}$: $0 < a < \frac{1}{n}$. Es folgt $0 < n \cdot a < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Archimedischen Axiom (siehe VL) gibt es für alle

$x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \cdot x > y$.

Wir verwenden dies für $x := a$ und $y := 1$. Wir haben bereits gezeigt, dass $x = a > 0$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n_0 \cdot a = n_0 \cdot x > y = 1$$

↯ zu $na < 1$.

□